

japanese-mathformulas.sty
manual pdf
(mainly for Japanese, lualatex)

Hugh / Ponkichi

2022 年 10 月 4 日

-機能紹介と注記-

中学高校で習う数学の定理や公式を出力するための sty ファイル。

`\NewDocumentCommand` によって、インデント
数式か別行立て数式かを指定できる。

後の例では記述がないが、`[i]` か `[b]` かの指定をしない場合は自動的に `[i]` とみなされる。

二段組の文書を作成するときは、数式の上下間スペースを減らすために、以下を preamble に記述するとよい。

- Function Introduction and Notes -

This is a style file for compiling basic math formulas.

`\NewDocumentCommand` allows you to specify whether the formula should be used within a sentence or on a new line.

Although not shown in the examples below, if `[i]` or `[b]` is not specified, it is automatically assumed to be `[i]`.

When making two-column document, you are recommended to put these lines at preamble. These reduce the space above and below math expressions.

```
\AtBeginDocument{
  \abovedisplayskip      =0\abovedisplayskip
  \abovedisplayshortskip=0\abovedisplayshortskip
  \belowdisplayskip      =0\belowdisplayskip
  \belowdisplayshortskip=0\belowdisplayshortskip}
```

以下が実例。

Now, here are the actual examples!

\二次式展開 {公式A}[i]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式因数分解 {公式A}[i]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式展開 {公式A}[i]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式B}[i]

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式B}[b]

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式C}[i]

$$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$$

\二次式展開 {公式C}[b]

$$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$$

\二次式展開 {公式D}[i]

$$(x+a)(x+b) = x + (a+b)x + ab$$

\二次式展開 {公式D}[b]

$$(x+a)(x+b) = x + (a+b)x + ab$$

\二次式因数分解 {公式A}[i]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式因数分解 {公式B}[i]

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

\二次式因数分解 {公式B}[b]

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

\二次式因数分解 {公式C}[i]

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

\二次式因数分解 {公式C}[b]

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

\二次式因数分解 {公式D}[i]

$$x + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

\二次式因数分解 {公式D}[b]

$$x + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

\平方根 {定義}[i]

$$a \text{ は実数として, } \sqrt{a^2} = |a|$$

\平方根 {定義}[b]

$$a \text{ は実数として,}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

\平方根 {性質A}[i]

$$a \geq 0 \text{ のとき, } (\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a} \geq 0$$

\平方根 {性質A}[b]

$a \leq 0$ のとき,

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a} \leq 0$$

\平方根 {性質B}[i]

$$\sqrt{a} = |a|$$

\平方根 {性質B}[b]

$$\sqrt{a} = |a|$$

\平方根 {性質C}[i]

$$a > 0, b > 0, a \neq b \text{ のとき, } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

\平方根 {性質C}[b]

$$a > 0, b > 0, a \neq b \text{ のとき,}$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

\平方根 {性質D}[i]

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

\平方根 {性質D}[b]

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

\平方根 {性質E}[i]

$$\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

\平方根 {性質E}[b]

$$\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

\一次不等式 {性質A}[i]

$$a < b \text{ のとき, } a + c < b + c$$

\一次不等式 {性質A}[b]

$$a < b \text{ のとき,}$$

$$a + c < b + c$$

\一次不等式 {性質B}[i]

$c > 0$ のとき, $ac < bc$

\一次不等式 {性質B}[b]

$c > 0$ のとき,

$$ac < bc$$

\一次不等式 {性質C}[i]

$c < 0$ のとき, $ac > bc$

\一次不等式 {性質C}[b]

$c < 0$ のとき,

$$ac > bc$$

\集合 {積集合}[i]

$$(A \cap B)$$

\集合 {積集合}[b]

$$(A \cap B)$$

\集合 {和集合}[i]

$$(A \cup B)$$

\集合 {和集合}[b]

$$(A \cup B)$$

\集合 {補集合}[i]

$$(\overline{A})$$

\集合 {補集合}[b]

$$(\overline{A})$$

\対偶 {定理}[i]

P ならば Q の命題において,

逆は Q ならば P

裏は P でないならば Q でない

対偶は Q でないならば P でない

対偶と元の命題の真偽は一致する。

\対偶 {定理}[b]

P ならば Q の命題において,

逆は Q ならば P

裏は P でないならば Q でない

対偶は Q でないならば P でない

対偶と元の命題の真偽は一致する。

\対偶 {証明}

【証明】

命題を「 p ならば q 」とし p の真理集合を P , q の真理集合を Q とする。

「 p ならば q 」が真のとき, $Q \subset P \Leftrightarrow \overline{P} \subset \overline{Q}$ より対偶命題「 q でないならば p でない」は真。

「 p ならば q 」が偽のとき, $Q \not\subset P \Leftrightarrow \overline{P} \not\subset \overline{Q}$ より対偶命題「 q でないならば p でない」は偽。

従って, 対偶命題と元の命題の真偽は一致する。

(Q.E.D.)

\背理法

命題 P ならば Q に対して P でないならば Q と仮定して矛盾を示す。

\二次関数 {標準形}[i]

$$y = a(x - p)^2 + q$$

\二次関数 {標準形}[b]

$$y = a(x - p)^2 + q$$

\二次関数 {一般形}[i]

$$y = ax^2 + bx + c$$

\二次関数 {一般形}[b]

$$y = ax^2 + bx + c$$

\二次関数 {切片形}[i]

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

\二次関数 {切片形}[b]

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

\二次関数 {平方完成}[i]

$$y = ax^2 + bx + c \text{ に対して, } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

\二次関数 {平方完成}[b]

$$y = ax^2 + bx + c \text{ に対して,}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

\二次方程式の解の公式 {公式}[i]

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ に対して, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
\二次方程式の解の公式 {公式}[b]

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ に対して,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

\二次方程式の解の公式 {証明A}[i]

【証明】

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c &= 0 \\ a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right\} + c &= 0 \\ a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

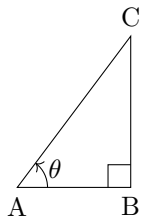
\二次方程式の解の公式 {証明B}[i]

【証明】

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\ (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac &= 0 \\ 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

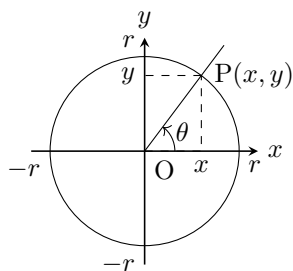
\三角比の定義 {定義A}[i]



図の様な直角 $\triangle ABC$ において $\angle CAB = \theta$ のとき,

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC}, \quad \cos \theta = \frac{AB}{AC}, \quad \tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

\三角比の定義 {定義B}[i]



図において

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

このとき, $r = 1$ にしても一般性を失わない。

\三角比の相互関係 {公式A}[i]

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

\三角比の相互関係 {公式A}[b]

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

\三角比の相互関係 {公式B}[i]

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

\三角比の相互関係 {公式B}[b]

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

\三角比の相互関係 {公式C}[i]

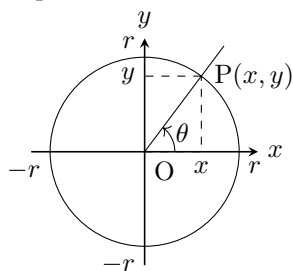
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

\三角比の相互関係 {公式C}[b]

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

\三角比の相互関係 {証明}

【証明】



図において, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ より

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

ここで, 三平方の定理より $x^2 + y^2 = r^2$ なので

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ より

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ることで,

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

ここで, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ なので

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

(Q.E.D.)

\正弦定理 {公式}[i]

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R として, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ (b, B, c, C についても同様に成立)

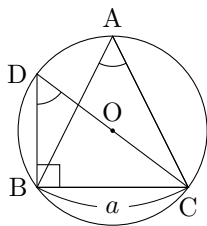
\正弦定理 {公式}[b]

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R として,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ (b, B, c, C についても同様に成立)}$$

\正弦定理 {証明}

【証明】



図において円周角の定理より,

$$\angle A = \angle D$$

なので, 円 O の半径を R として $\sin A = \sin D = \frac{a}{2R}$ より,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(Q.E.D.)

\余弦定理 {公式}[i]

$\triangle ABC$ において, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

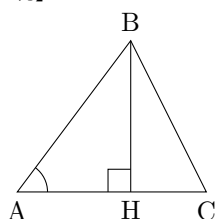
\余弦定理 {公式}[b]

$\triangle ABC$ において,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

\余弦定理 {証明}

【証明】



図において $BC = a$, $CA = b$, $AC = c$ として,

$$BH = c \sin A, \quad AH = c \cos A$$

また, $\triangle BHC$ に三平方の定理を用いることにより

$$CB^2 = BH^2 + HC^2$$

ここで, $HC = AC - AH = b - c \cos A$, $BH = c \sin A$ より

$$\begin{aligned} a^2 &= (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 \\ &= c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A \\ &= c^2 (1 - \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

よって,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(Q.E.D.)

\三角形の面積 {公式}[i]

$\triangle ABC$ の面積を S として, $S = \frac{1}{2}bc \sin A$

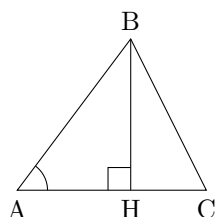
\三角形の面積 {公式}[b]

$\triangle ABC$ の面積を S として,

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

\三角形の面積 {証明}

【証明】



図において

$$BC = a, CA = b, AB = c$$

また, $\triangle ABC$ の面積を S として $S = \frac{1}{2}AC \times BH$ と, $AB \sin A = BH$ から,

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

(Q.E.D.)

\場合の数と確率 {和集合の要素の個数}[i]

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {和集合の要素の個数}[b]

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {補集合の要素の個数}[i]

$$\text{全体集合を } U \text{ として, } n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

\場合の数と確率 {補集合の要素の個数}[b]

全体集合を U として,

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

\場合の数と確率 {和の法則}[i]

二つの事象 A, B にたいして, A の起こりかたが a 通り, B の起こりかたが b 通りのとき, A または B の起こる場合の数は $a + b$ 通り

\場合の数と確率 {和の法則}[b]

二つの事象 A, B にたいして, A の起こりかたが a 通り, B の起こりかたが b 通りのとき, A または B の起こる場合の数は $a + b$ 通り

\場合の数と確率 {積の法則}[i]

二つの事象 A, B にたいして, A の起こりかたが a 通り, B の起こりかたが b 通りのとき, A かつ B の起こる場合の数は ab 通り

\場合の数と確率 {積の法則}[b]

二つの事象 A, B にたいして, A の起こりかたが a 通り, B の起こりかたが b 通りのとき, A かつ B の起こる場合の数は ab 通り

\場合の数と確率 {順列}[i]

$$\text{異なる } n \text{ 個のものから } r \text{ 個選んで並べる場合の数は } {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

\場合の数と確率 {順列}[b]

異なる n 個のものから r 個選んで並べる場合の数は

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

\ 場合の数と確率 {順列の証明}

【証明】

異なる n 個のものから r 個選んで並べる場合の数は、

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ここで、 $\frac{n!}{(n-r)!}$ を ${}_nP_r$ と表す。

(Q.E.D.)

\ 場合の数と確率 {円順列}[i]

異なる n 個のものを円に並べる場合の数は $(n-1)!$

\ 場合の数と確率 {円順列}[b]

異なる n 個のものを円に並べる場合の数は

$$(n-1)!$$

\ 場合の数と確率 {円順列の証明}

【証明】

n 個のものを円形に並べるとき、1つを固定して考えると、残り $n-1$ 個を並べる順列の個数に等しい。よって $(n-1)!$ 通りとなる。

\ 場合の数と確率 {重複順列}[i]

n 個から r 個、重複を許して並べる場合の数は n^r

\ 場合の数と確率 {重複順列}[b]

n 個から r 個、重複を許して並べる場合の数は

$$n^r$$

\ 場合の数と確率 {組み合わせ}[i]

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は、 ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

\ 場合の数と確率 {組み合わせ}[b]

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は、

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

\ 場合の数と確率 {組み合わせの証明}

【証明】

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は、順列を重複度で割ったものなので

$$\frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ここで、 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ を ${}_nC_r$ と表す。

(Q.E.D.)

\ 場合の数と確率 {同じものを含む順列}[i]

a が p 個, b が q 個, c が r 個, とあるとき, それら全部を並べる場合の数は, $\frac{n!}{p!q!r!}$ (ただし, $p+q+r=n$)

\場合の数と確率 {同じものを含む順列}[b]

a が p 個, b が q 個, c が r 個, とあるとき, それら全部を並べる場合の数は,

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad (\text{ただし, } p+q+r=n)$$

\場合の数と確率 {同じものを含む順列の証明}

【証明】

n 個のものを並べる場合の数は $n!$ 通りだが, n 個の中に同じものが含まれているので, 重複度で割ること
で $\frac{n!}{p!q!r!}$ を得る. (Q.E.D.)

\場合の数と確率 {確率の定義}[i]

全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき, 事象 A の起こる確率は, $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$

\場合の数と確率 {確率の定義}[b]

全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき, 事象 A の起こる確率は,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

\場合の数と確率 {排反の定義}[i]

事象 A, B が同時に起こりえないとき, A と B は互いに排反であるという。

\場合の数と確率 {排反の定義}[b]

事象 A, B が同時に起こりえないとき, A と B は互いに排反であるという。

\場合の数と確率 {確率の性質A}[i]

任意の事象 A に対して, $0 \leq A \leq 1$

\場合の数と確率 {確率の性質A}[b]

任意の事象 A に対して,

$$0 \leq A \leq 1$$

\場合の数と確率 {確率の性質B}[i]

全事象 U の確率 $P(U) = 1$

\場合の数と確率 {確率の性質B}[b]

全事象 U の確率

$$P(U) = 1$$

\場合の数と確率 {和事象の確率}[i]

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {和事象の確率}[b]

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {積事象の確率}[i]

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

\場合の数と確率 {余事象の確率}[b]

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

\場合の数と確率 {独立な事象の確率}[i]

事象 A と B が独立のとき、事象 A が起こりかつ事象 B が起こる確率 p は、 $p = P(A)P(B)$

\場合の数と確率 {独立な事象の確率}[b]

事象 A と B が独立のとき、事象 A が起こりかつ事象 B が起こる確率 p は、

$$p = P(A)P(B)$$

\場合の数と確率 {反復試行の確率}[i]

一回の試行で事象 A の起こる確率を p として、この試行を n 回行う反復試行で A が r 回起こる確率は、
 ${}_nC_r(p)^r(1-p)^{n-r}$

\場合の数と確率 {反復試行の確率}[b]

一回の試行で事象 A の起こる確率を p として、この試行を n 回行う反復試行で A が r 回起こる確率は、

$${}_nC_r(p)^r(1-p)^{n-r}$$

\場合の数と確率 {反復試行の確率の証明}

【証明】

n 回の試行のうち事象 A が r 回起こる順番の場合の数は ${}_nC_r$ 通り。さらに、A が起こる確率は p で r 回起こり、A の余事象が起こる確率は $p-1$ で $n-r$ 回起こるので、

$${}_nC_r(p)^r(1-p)^{n-r}$$

となる。

(Q.E.D.)

\場合の数と確率 {条件付き確率}[i]

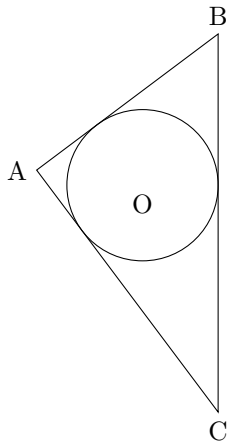
事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率は、 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

\場合の数と確率 {条件付き確率}[b]

事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率は、

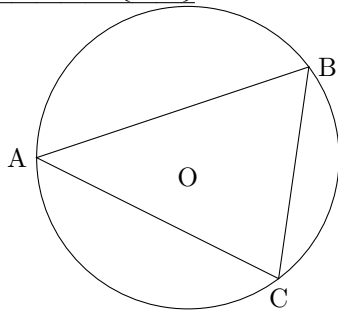
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

\図形の性質 {内心}



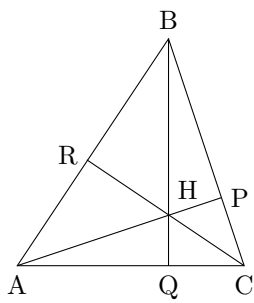
図において O が内心

\図形の性質 {外心}



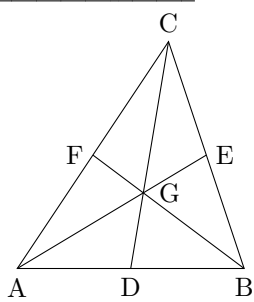
図において O が外心

\図形の性質 {垂心}



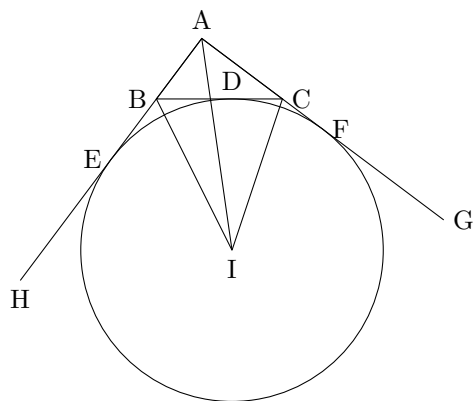
図において H が垂心

\図形の性質 {重心}



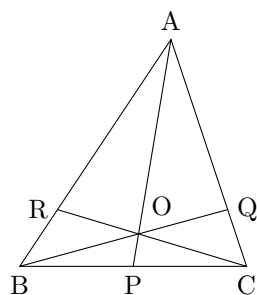
図において G が重心

\図形の性質 {傍心}



図において I が傍心

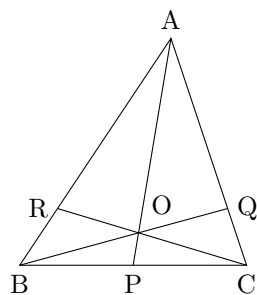
\図形の性質 {チェバの定理}



$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

\図形の性質 {チェバの定理の証明}

【証明】



図において三角形の面積比を考えると、

$$\triangle ABO : \triangle ACO = BP : CP$$

$$\Leftrightarrow \frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} = \frac{BP}{PC}$$

同様にして、

$$\frac{\triangle BCO}{\triangle BAO} = \frac{CQ}{QA}$$

$$\frac{\triangle CAO}{\triangle CBO} = \frac{AR}{RB}$$

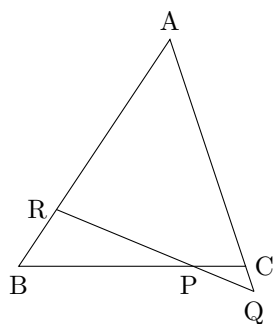
ここで,

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} \cdot \frac{\triangle BCO}{\triangle BAO} \cdot \frac{\triangle CAO}{\triangle CBO} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

(Q.E.D.)

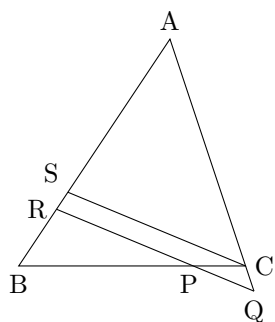
\図形の性質 {メネラウスの定理}



$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

\図形の性質 {メネラウスの定理の証明}

【証明】



SC//RP より,

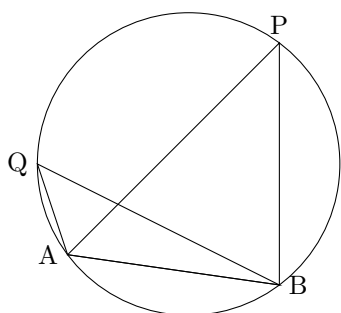
$$RA : SR = QA : CQ, BR : RS = BP : PC$$

$$\Leftrightarrow \frac{CQ}{QA} = \frac{SR}{AR}, \frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RS}$$

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{RS} \cdot \frac{SR}{AR} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

(Q.E.D.)

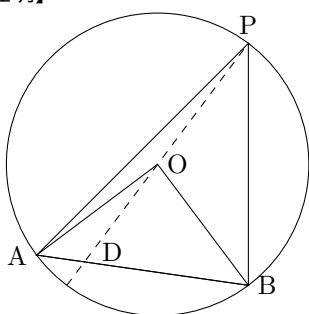
\図形の性質 {円周角の定理}



$$\angle APB = \angle AQB$$

\図形の性質 {円周角の定理の証明}

【証明】



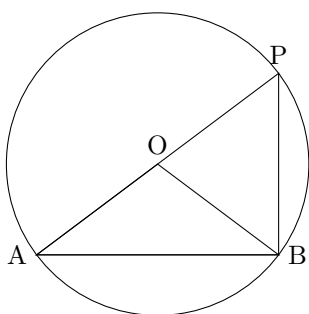
$\triangle AOP$, $\triangle BOP$ は二等辺三角形なので,

$$\angle APO = \angle OAP, \angle BPO = \angle OBP$$

外角定理より,

$$\angle AOD = 2\angle APO, \angle BOD = 2\angle BPO$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB = 2\angle APB$$

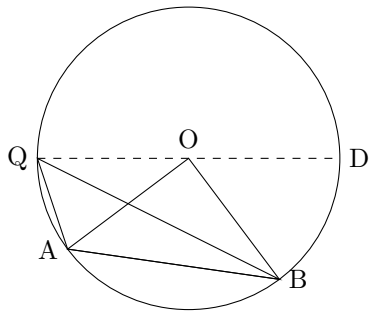


$\triangle OPB$ は二等辺三角形なので,

$$\angle OPB = \angle OBP$$

外角定理より

$$\angle AOB = 2\angle OPB$$



$\triangle QOA, \triangle OQB$ は二等辺三角形なので,

$$\angle OQA = \angle OAQ, \angle OQB = \angle OBQ$$

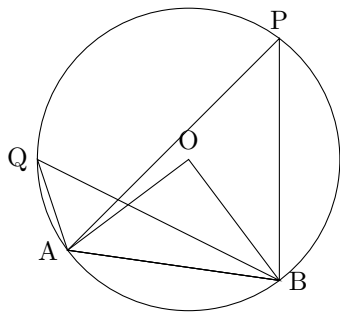
外角定理より,

$$\angle OQA + \angle OAQ = \angle DOA, \angle OQB + \angle OBQ = \angle DOB$$

$$\Leftrightarrow \angle DOA - \angle DOB = 2(\angle OQA - \angle OBQ)$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB = 2\angle AQB$$

従って、円に内接する三角形について、円周角の 2 倍が中心角である。



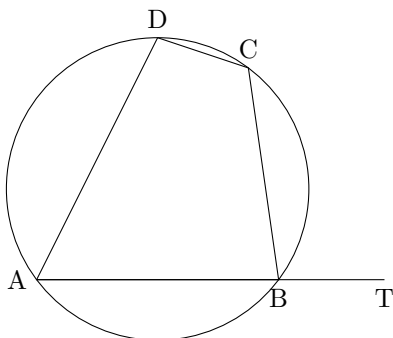
$$\angle APB = 2\angle AOB, \angle AQB = 2\angle AOB$$

$$\Leftrightarrow \angle AQB = \angle APB$$

が成立。

(Q.E.D.)

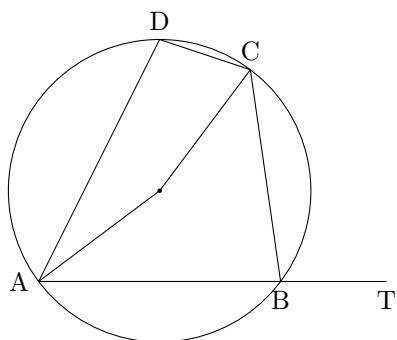
\図形の性質 {内接四角形の定理}



$$\angle ADC = \angle CBT$$

\図形の性質 {内接四角形の定理の証明}

【証明】



$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

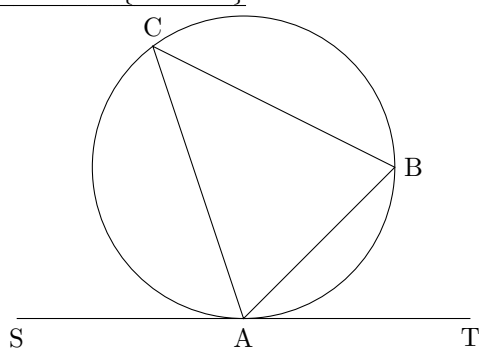
$$\angle AOC = 2\angle ADC$$

ここで, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow \angle AOC + \angle AOC = 180^\circ$$

(Q.E.D.)

\図形の性質 {接弦定理}

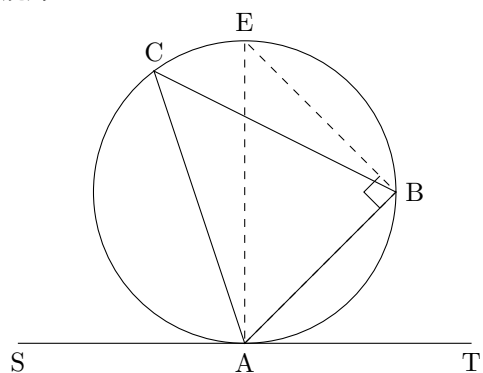


$$\angle BAT = \angle ACB$$

\図形の性質 {接弦定理の証明}

【証明】

1. 鋭角のとき



$\triangle ACB$ と $\triangle ABE$ について円周角の定理より,

$$\angle ACB = \angle AEB$$

ここで, $\triangle ABE$ について

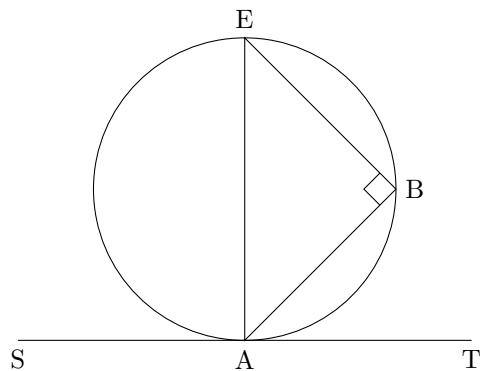
$$\angle BEA + \angle BAE = 90^\circ$$

また, AT が円の接線なので $\angle BAE + \angle BAT = 90^\circ$ から,

$$\angle BAT = \angle AEB$$

$$\Leftrightarrow \angle ACB = \angle BAT$$

2. 直角のとき

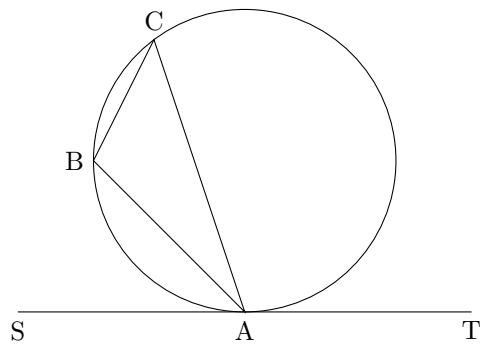


AT が円の接線なので,

$$\angle EAS = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle EBA = \angle EAS$$

3. 鈍角のとき



鋭角のときの接弦定理より,

$$\angle BCA = \angle BAS$$

また, $\triangle ABC$ において

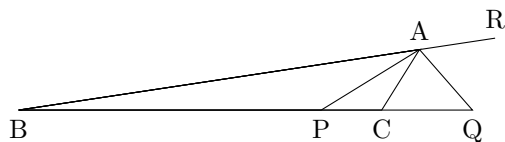
$$\angle ABC = \angle ACB + \angle BAC$$

$$\Leftrightarrow \angle ABC = \angle CAT$$

従って円に内接する三角形について成り立つことが証明された。

(Q.E.D.)

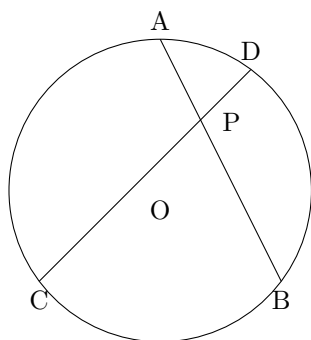
\図形の性質 {内角と外角の二等分線}



$\angle BAP = \angle PAC, \angle CAQ = \angle QAR$ のとき,

$$BP : PC = BQ : QC = AB : AC$$

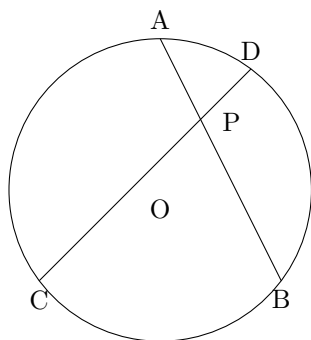
\図形の性質 {方べきの定理A}



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

\図形の性質 {方べきの定理Aの証明}

【証明】



円周角の定理より,

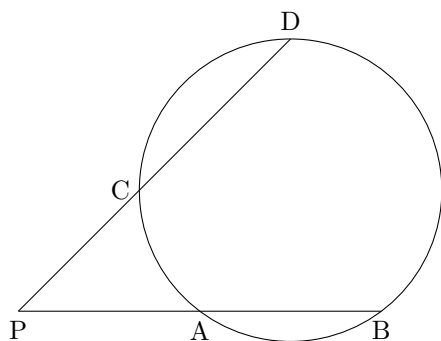
$$\angle CAP = \angle BDP, \quad \angle ACP = \angle DBP$$

$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ は相似なので,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

(Q.E.D.)

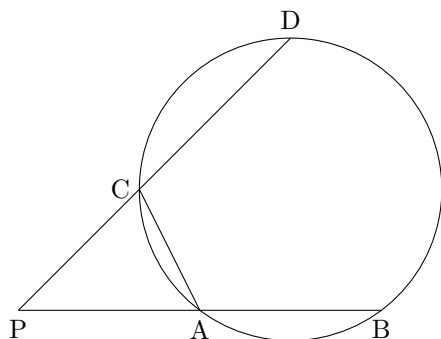
\図形の性質 {方べきの定理B}



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

\図形の性質 {方べきの定理Bの証明}

【証明】



内接四角形の証明より,

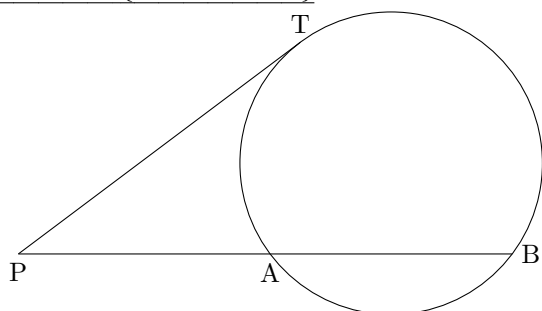
$$\angle CDB = \angle CAP, \angle DBA = \angle PCA$$

$\triangle ACP$ と $\triangle DPB$ は相似なので,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

(Q.E.D.)

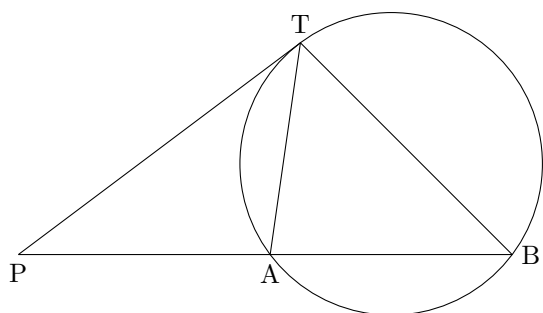
\図形の性質 {方べきの定理C}



$$PA \cdot PB = PT^2$$

\図形の性質 {方べきの定理Cの証明}

【証明】



接弦定理より,

$$\angle TBA = \angle PTA$$

これと, $\angle P$ 共通なので $\triangle PTA$ と $\triangle PBT$ は相似より,

$$PA \cdot PB = PT^2$$

(Q.E.D.)

\三次式展開 {公式A}[i]

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

\三次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

\三次式展開 {公式B}[i]

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

\三次式展開 {公式B}[b]

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

\三次式展開 {公式C}[i]

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

\三次式展開 {公式C}[b]

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

\三次式展開 {公式D}[i]

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

\三次式展開 {公式D}[b]

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

\三次式因数分解 {公式A}[i]

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

\三次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

\三次式因数分解 {公式B}[i]

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

\三次式因数分解 {公式B}[b]

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

\三次式因数分解 {公式C}[i]

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

\三次式因数分解 {公式C}[b]

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

\三次式因数分解 {公式D}[i]

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

\三次式因数分解 {公式D}[b]

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

\二項定理 {公式}[i]

$$(a + b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

\二項定理 {公式}[b]

$$(a + b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

\二項定理 {一般項}[i]

$${}_nC_ra^{n-r}b^r$$

\二項定理 {一般項}[b]

$${}_nC_ra^{n-r}b^r$$

\二項定理 {証明}

【証明】

$(a+b)^n$ を展開すると, $a^r b^{n-r}$ の項の係数は n 個の a から r 個 a を選ぶ場合の数に等しいので係数は ${}_nC_r$ によって, 一般項は

$${}_nC_r a^{n-r} b^r$$

この r に 1 から順番に自然数を代入したものが二項定理となる。

(Q.E.D.)

\分数式 {公式A}[i]

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

\分数式 {公式A}[b]

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

\分数式 {公式B}[i]

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

\分数式 {公式B}[b]

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

\分数式 {公式C}[i]

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

\分数式 {公式C}[b]

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

\分数式 {公式D}[i]

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

\分数式 {公式D}[b]

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

\相加相乗平均 {公式}[i]

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

\相加相乗平均 {公式}[b]

$a > 0, b > 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

\相加相乗平均 {証明}

【証明】

$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ を示す。

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

より, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ は実数なので,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

よって, $a > 0, b > 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立条件は } a = b)$$

(Q.E.D.)

\虚数の定義 {定義}[i]

$$i = \sqrt{-1}$$

\虚数の定義 {定義}[b]

$$i = \sqrt{-1}$$

\複素数の定義 {定義}[i]

実数 a, b を用いて, $a + bi$

\複素数の定義 {定義}[b]

実数 a, b を用いて,

$$a + bi$$

\二次方程式の解の判別

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \text{ の判別式を } D = b^2 - 4ac \text{ とすると, } \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \text{ のとき, 異なる二つの実数解} \\ D = 0 \text{ のとき, 重解} \\ D < 0 \text{ のとき, 異なる二つの虚数解} \end{array} \right\}$$

を持つ。

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係A}[i]

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ として, } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係A}[b]

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ として,}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係B}[i]

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ として, } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係B}[b]

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β として,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係の証明}

【証明】

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

係数比較することで,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(Q.E.D.)

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係A}[i]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として, $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係A}[b]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係B}[i]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係B}[b]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係C}[i]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係C}[b]

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ の解を α, β, γ として,

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係の証明}

【証明】

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = a\{x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma\}$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right)$$

係数比較することで,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

(Q.E.D.)

\剰余定理 {定理A}[i]

整式 $P(x)$ を $x - k$ で割った余りは $P(k)$

\剰余定理 {定理A}[b]

整式 $P(x)$ を $x - k$ で割った余りは

$$P(k)$$

\剰余定理 {定理B}[i]

整式 $P(x)$ を $ax - b$ で割った余りは $P\left(\frac{b}{a}\right)$

\剰余定理 {定理B}[b]

整式 $P(x)$ を $ax - b$ で割った余りは

$$P\left(\frac{b}{a}\right)$$

\剰余定理 {証明}

【証明】

$P(x)$ を $(x - k)$ で割った商を $Q(x)$ あまりを R として,

$$P(x) = (x - k)Q(x) + R$$

$x = k$ のとき,

$$P(k) = R$$

よって, 余りは

$$P(k)$$

(Q.E.D.)

\因数定理 {定理}[i]

整式 $P(x)$ が $x - k$ を因数に持つ $\Leftrightarrow P(k) = 0$

\因数定理 {定理}[b]

整式 $P(x)$ が $x - k$ を因数に持つ

$$\Leftrightarrow P(k) = 0$$

\因数定理 {証明}

【証明】

剰余の定理より, $x - k$ で割った余りが 0 なので,

$$P(k) = 0$$

剰余の定理より, $P(k) = 0$ ということは $P(x)$ を $x - k$ で割った余りが 0 ということなので, $P(x)$ は $x - k$ を因数に持つ。 (Q.E.D.)

\ユークリッド幾何の公理 {公理A}

二つの異なる二点を与えることで, それを通る直線が一意的に決定する。

\ユークリッド幾何の公理 {公理B}

一つの直線 l と l 上にない一つの点を与えられたとき, 与えられた点を通り, l に平行な直線をただ一つ引くことができる。

\直線

両方向に限りなく伸びたまっすぐな線。

\線分

直線 AB のうち, 二点 A, B を端とする部分。

\半直線

直線 AB のうち, 一方の点を端とし, もう一方に限りなく伸びた部分。

\距離

空でない集合 X の元 x, y に対して, 実数値 $d(x, y)$ が定義され,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (x, y) = d(y, x), \quad (x, y) \leq d(x, y) + d(y, x)$$

の三つの性質を満たす d を X 上の距離といい, (X, d) を距離空間という。

\円

平面上の一点から等しい距離にある点の集合。

\弧

円周上の二点 A, B に対して, A, B によって分けられた円周の各々の部分を弧 AB といい, \widehat{AB} と表す。

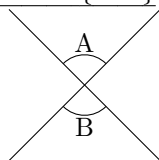
\弦

弧の両端を結んだ線分。

\中心角

円の中心を頂点として, 2 辺が弧の両端を通る角を, その弧に対する中心角という。

\対頂角 {定義}



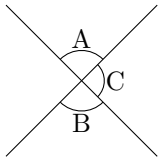
図において, $\angle A$ と $\angle B$ を対頂角という。

\対頂角 {性質}

対頂角は等しい。

\対頂角 {証明}

【証明】



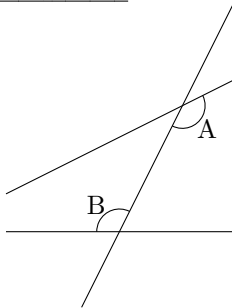
$$180^\circ = \angle A + \angle C$$

$$180^\circ = \angle B + \angle C$$

$$\Leftrightarrow \angle A = \angle B$$

(Q.E.D.)

\錯角 {定義}



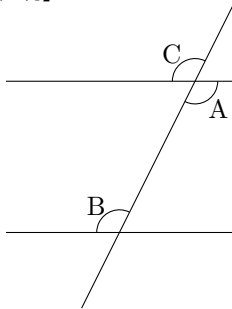
図において、 $\angle A$ と $\angle B$ を錯角という。

\錯角 {性質}

直線 l , m において、錯角が等しい \Leftrightarrow 直線 l , m は平行。

\錯角 {証明}

【証明】



1. 「平行ならば錯角が等しい」の証明。

対頂角は等しいので、

$$\angle A = \angle C$$

ここで、 $\angle B$ と $\angle C$ は同位角なので等しいので、

$$\angle A = \angle B$$

2. 「錯角が等しいならば平行」の証明。

錯角が等しいので,

$$\angle A = \angle B$$

対頂角は等しいので,

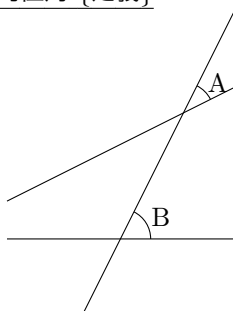
$$\angle A = \angle C$$

$$\Leftrightarrow \angle C = \angle B$$

即ち, 同位角が等しいので二直線は平行。

(Q.E.D.)

\同位角 {定義}



図において, $\angle A$ と $\angle B$ を同位角という。

\同位角 {公理}

直線 l, m において, 同位角が等しい \Leftrightarrow 直線 l, m は平行。

\点の座標 {二点間の距離}[i]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ として, 線分 AB 間の距離は, $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

\点の座標 {二点間の距離}[b]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ として, 線分 AB 間の距離は,

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

\点の座標 {内分点の座標}[i]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ として, 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は, $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\right)$

\点の座標 {内分点の座標}[b]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ として, 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は,

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\right)$$

\点の座標 {内分点の座標の証明}

【証明】

$m:n$ に内分する点の座標を $P(x, y)$ として,

$$m:n = x - x_1 : x_2 - x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \right)$$

(Q.E.D.)

\点の座標 {外分点の座標}[i]

A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) として, 線分 AB を m : n に外分する点の座標は, $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$

\点の座標 {外分点の座標}[b]

A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) として, 線分 AB を m : n に外分する点の座標は,

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

\点の座標 {外分点の座標の証明}

【証明】

1. m > n のとき

n : m に外分する点の座標を P(x, y) として,

$$m : n = x - x_1 : x - x_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

2. m < n のとき

n : m に外分する点の座標を P(x, y) として,

$$m : n = x - x_2 : x - x_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

よって m, n の大小に依らず

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

となる。

(Q.E.D.)

\点の座標 {中点の座標}[i]

A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) として, 線分 AB の中点は, $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

\点の座標 {中点の座標}[b]

A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) として, 線分 AB の中点は,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

\点の座標 {中点の座標の証明}

【証明】

内分点の公式において m = n のとき,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

(Q.E.D.)

\点の座標 {重心の座標}[i]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ として, $\triangle ABC$ の重心の座標は, $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

\点の座標 {重心の座標}[b]

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ として, $\triangle ABC$ の重心の座標は,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

\点の座標 {重心の座標の証明}

【証明】

A と B の中点 M の座標は $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

重心は CM を $2:1$ に内分するので, 重心の座標は内分点の公式より,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

(Q.E.D.)

\直線の方程式 {公式A}[i]

$$ax + by + c = 0$$

\直線の方程式 {公式A}[b]

$$ax + by + c = 0$$

\直線の方程式 {公式B}[i]

点 (x_1, y_1) を通り傾きが m の直線は, $y - y_1 = m(x - x_1)$

\直線の方程式 {公式B}[b]

点 (x_1, y_1) を通り傾きが m の直線は,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

\直線の方程式 {公式C}[i]

異なる二点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線 ($x_1 \neq x_2$) は, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

\直線の方程式 {公式C}[b]

異なる二点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線, ($x_1 \neq x_2$) は,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

\直線の方程式 {公式Bの証明}

【証明】

傾き m なので, $y = mx + a$ と置ける (a は切片)。

ここで, (x_1, y_1) を通るので, $y_1 = mx_1 + a$ となり, 連立することで

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

を得る。

(Q.E.D.)

\二直線の関係 {公式A}[i]

二直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が平行 $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

\二直線の関係 {公式A}[b]

二直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が平行

$$\Leftrightarrow m_1 = m_2$$

\二直線の関係 {公式B}[i]

二直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が垂直 $\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

\二直線の関係 {公式B}[b]

二直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ が垂直

$$\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$$

\二直線の関係 {公式Bの証明}

【証明】

$y = m_1x$ 上に点 $A(1, m_1)$, $y = m_2x$ 上に $B(-m_1, 1)$ をとる。

$H(1, 0)$, $I(0, 1)$ として, $\triangle OAH$ と $\triangle OBI$ は合同。よって,

$$m_1m_2 = -1$$

(Q.E.D.)

\点と直線の距離 {公式}[i]

点 (x_1, y_2) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は, $\frac{|ax_1 + by_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

\点と直線の距離 {公式}[b]

点 (x_1, y_2) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は,

$$\frac{|ax_1 + by_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

\点と直線の距離 {証明}

【証明】

全体を x 軸方向に $-x_1$, y 軸方向に $-y_1$ 平行移動するとき, 直線 l は $a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$ となる。

また, 直線 l に原点 O からおろした垂線との交点を H とする。ここで OH 間の距離を d と置くと,

1. $a \neq 0$ のとき

直線 l の垂線の傾きは b の値に依らず, $y = \frac{b}{a}$ となる。

よって, H の座標は二式を連立することで得られ,

$$\left(\frac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}, \frac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{\left\{ \left(\frac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left\{ \frac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right\}^2 \right\}}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. $a = 0$ のとき

直線 l は $y = -\frac{by_1 + c}{b}$ となるので,

$$d = \left| -\frac{by_1 + c}{b} \right|$$

$$= \frac{|by_1 + c|}{|b|}$$

これは, $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ に $a = 0$ を代入したものである。

よって, いずれの場合も

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を得る。

(Q.E.D.)

\円の方程式 {公式}[i]

中心 (a, b) で半径 r の円は, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ と表す ($x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 - 4C > 0$) の形でもよい)。

\円の方程式 {公式}[b]

中心 (a, b) で半径 r の円は,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

また, 円は

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 - 4C > 0)$$

とも表せられる。

\円の方程式 {証明}

【証明】

円の中心を O , 円周上の任意の点を $P(x, y)$ として, 三平方の定理より

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

(Q.E.D.)

\円と直線 {公式}[i]

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は, $xx_1 + yy_1 = r^2$

\円と直線 {公式}[b]

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は,

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

\円と直線 {証明}

【証明】

1. $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ のとき

$A(x_0, y_0)$ と置いて, OA の傾きは $\frac{y_0}{x_0}$ となる。接線の傾きはこれに垂直なので, $-\frac{x_0}{y_0}$ また接線は点 (x_0, y_0) を通るので

$$y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$$

より, (x_0, y_0) が $x^2 + y^2 = r^2$ 上に存在することに留意して, $x_0x + y_0y = r^2$ となる。

2. $x_0 \neq 0$ のとき

$y_0 = \pm r$ より接線は $y = \pm r$ (複号同順)

3. $y_0 = 0$ のとき

$x_0 = \pm r$ より接線は $x = \pm r$ (複号同順)

よって, 接線の方程式は

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

(Q.E.D.)

\三角関数の相互関係 {公式A}[i]

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

\三角関数の相互関係 {公式A}[b]

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

\三角関数の相互関係 {公式B}[i]

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

\三角関数の相互関係 {公式B}[b]

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

\三角関数の相互関係 {公式C}[i]

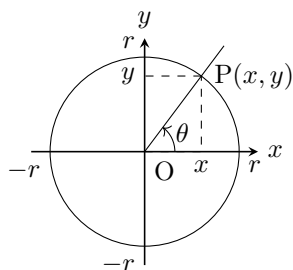
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

\三角関数の相互関係 {公式C}[b]

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

\三角関数の相互関係 {証明}

【証明】



図において, $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ より

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

ここで, 三平方の定理より $x^2 + y^2 = r^2$ なので

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{より}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ることで,

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

ここで, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ なので

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

\三角関数の性質 {性質A}[i]

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質A}[b]

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質B}[i]

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質B}[b]

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質C}[i]

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質C}[b]

(Q.E.D.)

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質D}[i]

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質D}[b]

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質E}[i]

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質E}[b]

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質F}[i]

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質F}[b]

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質G}[i]

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質G}[b]

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質H}[i]

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質H}[b]

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質I}[i]

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質I}[b]

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

\三角関数の性質 {性質J}[i]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質J}[b]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質K}[i]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質K}[b]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質L}[i]

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

\三角関数の性質 {性質L}[b]

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

\三角関数の性質 {性質M}[i]

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質M}[b]

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

\三角関数の性質 {性質N}[i]

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質N}[b]

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

\三角関数の性質 {性質O}[i]

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

\三角関数の性質 {性質O}[b]

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

\三角関数の加法定理 {公式A}[i]

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \text{ (複号同順)}$$

\三角関数の加法定理 {公式A}[b]

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \text{ (複号同順)}$$

\三角関数の加法定理 {公式B}[i]

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \text{ (複号同順)}$$

\三角関数の加法定理 {公式B}[b]

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

(複号同順)

\三角関数の加法定理 {公式C}[i]

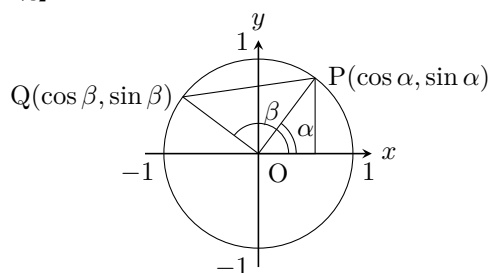
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \text{ (複号同順)}$$

\三角関数の加法定理 {公式C}[b]

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \text{ (複号同順)}$$

\三角関数の加法定理 {証明}

【証明】



図において、三角関数の性質より $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta)$ なので、 $\triangle QOP$ について余弦定理より

$$QP^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

また, QP 間の距離について三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} \text{QP}^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ \Leftrightarrow 2 - 2 \cos (\alpha - \beta) &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \end{aligned}$$

両辺整理して,

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

を得る。

また, $\sin -\theta = -\sin \theta$ より,

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

において, α を $\frac{\pi}{2} - \alpha$ にすることで,

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

ここで, β を $-\beta$ にすることで,

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より,}$$

$$\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} \text{ (複号同順)}$$

両辺を $\cos \alpha \cos \beta$ でわることで,

$$\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \text{ (複号同順)}$$

を得る。

(Q.E.D.)

\三角関数の二倍角の公式 {公式A}[i]

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式A}[b]

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式B}[i]

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式B}[b]

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式C}[i]

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式C}[b]

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式D}[i]

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式D}[b]

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式E}[i]

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式E}[b]

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

\三角関数の二倍角の公式 {証明}

【証明】

$$\text{三角関数の加法定理} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{array} \right\} \text{において, } \alpha = \beta = \theta \text{ として,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \end{array} \right\} \text{を得る。}$$

また, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ において, 三角関数の相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて,

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

を得る。

(Q.E.D.)

\三角関数の三倍角の公式 {公式A}[i]

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {公式A}[b]

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {公式B}[i]

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {公式B}[b]

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

において, $\alpha = \theta$, $\beta = 2\theta$ のとき,

$$\sin 3\theta = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta$$

二倍角の公式と三角関数の相互関係より,

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta \cos^2 \theta \\ &= \sin \theta - 2\sin^3 \theta + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= -4\sin^3 \theta + 3\sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\三角関数の積和公式 {公式A}[i]

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式A}[b]

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式B}[i]

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式B}[b]

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式C}[i]

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式C}[b]

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

より, ① + ② から

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \}$$

③ + ④ から

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \}$$

④ - ③ から

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \}$$

(Q.E.D.)

\三角関数の和積公式 {公式A}[i]

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式A}[b]

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式B}[i]

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式B}[b]

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式C}[i]

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式C}[b]

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式D}[i]

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式D}[b]

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {証明}

【証明】

三角関数の積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \}$$

において、 $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ と置くことで、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ となるので、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

(Q.E.D.)

となる。

\三角関数の合成 {公式}[i]

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \left(\text{ただし, } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

\三角関数の合成 {公式}[b]

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \left(\text{ただし, } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

\三角関数の合成 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ について,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$$

とすることで,

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

となる。

(Q.E.D.)

\有理数の指数 {公式A}[i]

$a > 0$ また m, n が正の整数, r が正の有理数のとき, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

\有理数の指数 {公式A}[b]

$a > 0$ また m, n が正の整数, r が正の有理数のとき,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

\有理数の指数 {公式B}[i]

$a > 0$ また n が正の整数のとき, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

\有理数の指数 {公式B}[b]

$a > 0$ また n が正の整数のとき,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

\有理数の指数 {公式C}[i]

$a > 0$, r が正の有理数のとき, $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

\有理数の指数 {公式C}[b]

$a > 0$, r が正の有理数のとき,

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

\指数法則 {公式A}[i]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、 $a^r a^s = a^{r+s}$

\指数法則 {公式A}[b]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

\指数法則 {公式B}[i]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、 $(a^r)^s = a^{rs}$

\指数法則 {公式B}[b]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

\指数法則 {公式C}[i]

$a > 0, b > 0$ また、 r は有理数のとき、 $(ab)^r = a^r b^r$

\指数法則 {公式C}[b]

$a > 0, b > 0$ また、 r は有理数のとき、

$$(ab)^r = a^r b^r$$

\指数法則 {公式D}[i]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、 $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

\指数法則 {公式D}[b]

$a > 0$ また、 r, s は有理数のとき、

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

\指数法則 {公式E}[i]

$a > 0, b > 0$ また、 r は有理数のとき、 $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

\指数法則 {公式E}[b]

$a > 0, b > 0$ また、 r は有理数のとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

\対数の定義 {定義}[i]

$a > 0, b > 0$ で、 r, s は有理数とする。

$a^p = M$ ならば、 $\log_a M, \log_a M \log_a M$ ならば、 $a^p = M$

\対数の定義 {定義}[b]

$a > 0, b > 0$ で、 r, s は有理数とする。

$a^p = M$ ならば、 $\log_a M$

$\log_a M$ ならば、 $a^p = M$

\対数の性質 {公式A}[i]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき, $\log_a a = 1$

\対数の性質 {公式A}[b]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき,

$$\log_a a = 1$$

\対数の性質 {公式B}[i]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき, $\log_a 1 = 0$

\対数の性質 {公式B}[b]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき,

$$\log_a 1 = 0$$

\対数の性質 {公式C}[i]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき, $\log_a \frac{1}{a} = -1$

\対数の性質 {公式C}[b]

$a > 0, a \neq 1$ とするとき,

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

\対数の性質 {公式D}[i]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

\対数の性質 {公式D}[b]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき,

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

\対数の性質 {公式E}[i]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

\対数の性質 {公式E}[b]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき,

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

\対数の性質 {公式F}[i]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき, $\log_a M^k = k \log_a M$

\対数の性質 {公式F}[b]

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ とするとき,

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

\対数の性質 {証明}

【証明】

$p = \log_a M$, $q = \log_a N$ として,

$MN = a^p a^q$ 指数法則より

$$MN = a^{p+q}$$

ここで, 対数の定義より

$$\log_a MN = p + q$$

$$\Leftrightarrow \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$p = \log_a M$, $q = \log_a N$ として,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q}$$

指数法則より

$$\frac{M}{N} = a^{p-q}$$

ここで, 対数の定義より

$$\log_a \frac{M}{N} = p - q$$

$$\Leftrightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$p = \log_a M$ として, $a^p = M$ より両辺 k 乗して

$$a^{pk} = M^k$$

対数を取ると

$$pk = \log_a M^k$$

$p = \log_a M$ より,

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

(Q.E.D.)

\底の変換公式 {公式}[i]

a, b, c は正の実数で, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ のとき, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

\底の変換公式 {公式}[b]

a, b, c は正の実数で, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ のとき,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

\底の変換公式 {証明}

【証明】

対数の定義より $a^{\log_a b} = b$ が成立。

底が c の対数を取ると,

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

対数の性質より,

$$\log_a b \log_c a = \log_c b$$

よって,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(Q.E.D.)

\導関数の定義 {定義}[i]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

\導関数の定義 {定義}[b]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式A}[i]

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式A}[b]

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式B}[i]

$$(c)' = 0$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式B}[b]

$$(c)' = 0$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {証明}

【証明】

導関数の定義より,

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

二項定理より,

$$\begin{aligned}
 (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} h + {}_nC_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-1} + {}_nC_n h^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} ({}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} h + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-2} + {}_nC_n h^{n-1}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \{ {}_nC_1 x^{n-1} + ({}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1} x h^{n-3} + {}_nC_n h^{n-2}) h \} \\
 &= {}_nC_1 x^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\導関数の性質 {公式A}[i]

$$kf(x)' = kf'(x)$$

\導関数の性質 {公式A}[b]

$$kf(x)' = kf'(x)$$

\導関数の性質 {公式B}[i]

$$f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$$

\導関数の性質 {公式B}[b]

$$f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$$

\導関数の性質 {公式C}[i]

$$kf(x) + lg(x)' = kf'(x) + lg'(x)$$

\導関数の性質 {公式C}[b]

$$kf(x) + lg(x)' = kf'(x) + lg'(x)$$

\接線の方程式 {公式}[i]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における曲線の接線の方程式は, $y - f(a) = f'(x)(x - a)$

\接線の方程式 {公式}[b]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における曲線の接線の方程式は,

$$y - f(a) = f'(x)(x - a)$$

\不定積分の定義 {定義}[i]

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき, } \int f(x) dx = F(x) + C (C \text{ は積分定数})$$

\不定積分の定義 {定義}[b]

$F'(x) = f(x)$ のとき,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

\べき乗関数の不定積分 {公式}[i]

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

\べき乗関数の不定積分 {公式}[b]

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$\frac{1}{k}$

$$k \int f(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$\frac{1}{k}$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$\frac{1}{k}$

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$\frac{1}{k}$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$\frac{1}{k}$

$$k \int f(x) dx + l \int g(x)$$

$$\int kf(x) + lg(x) dx = k \int f(x) dx + l \int g(x)$$

$$\int k f(x) + l g(x) dx = k \int f(x) dx + l \int g(x)$$

$$\int k f(x) + l g(x) dx = k \int f(x) dx + l \int g(x)$$

\定積分の定義 {定義}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (区間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について, $F'(x) = f(x)$ のとき,
 $S = \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

\定積分の定義 {定義}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (区間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について, $F'(x) = f(x)$ のとき,

$$S = \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

\定積分の性質 {公式A}[i]

$$\int_b^a k f(x) dx = k \int_b^a f(x) dx$$

\定積分の性質 {公式A}[b]

$$\int_b^a k f(x) dx = k \int_b^a f(x) dx$$

\定積分の性質 {公式B}[i]

$$\int_b^a f(x) \pm g(x) dx = \int_b^a f(x) dx \pm \int_b^a g(x) dx$$

\定積分の性質 {公式B}[b]

$$\int_b^a f(x) \pm g(x) dx = \int_b^a f(x) dx \pm \int_b^a g(x) dx$$

\定積分の性質 {公式C}[i]

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

\定積分の性質 {公式C}[b]

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

\定積分の性質 {公式D}[i]

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

\定積分の性質 {公式D}[b]

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

\定積分の性質 {公式E}[i]

$$\int_b^a f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

\定積分の性質 {公式E}[b]

$$\int_b^a f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

\ベクトルの演算 {公式A}[i]

$$k, l \text{ が実数のとき, } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式A}[b]

$$k, l \text{ が実数のとき}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式B}[i]

$$k, l \text{ が実数のとき, } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

\ベクトルの演算 {公式B}[b]

$$k, l \text{ が実数のとき}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

\ベクトルの演算 {公式C}[i]

$$\vec{a} + (\alpha \vec{a}) = \vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式C}[b]

$$\vec{a} + (\alpha \vec{a}) = \vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式D}[i]

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式D}[b]

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式E}[i]

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

\ベクトルの演算 {公式E}[b]

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

\ベクトルの演算 {公式F}[i]

$$k, l \text{ が実数のとき, } k(l\vec{a}) = l(k\vec{a})$$

\ベクトルの演算 {公式F}[b]

k, l が実数のとき

$$k(l\vec{a}) = l(k\vec{a})$$

\ベクトルの演算 {公式G}[i]

$$k, l \text{ が実数のとき, } (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式G}[b]

k, l が実数のとき

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式H}[i]

$$k \text{ が実数のとき, } k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

\ベクトルの演算 {公式H}[b]

k が実数のとき

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

\ベクトルの演算 {公式I}[i]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

\ベクトルの演算 {公式I}[b]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

\ベクトルの演算 {公式J}[i]

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

\ベクトルの演算 {公式J}[b]

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

\ベクトルの演算 {公式K}[i]

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式K}[b]

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式L}[i]

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

\ベクトルの演算 {公式L}[b]

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

\平面ベクトルの分解 {公式}[i]

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ で, \vec{a} と \vec{b} が平行でないとき, 任意の \vec{p} はただ一通りに, $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せられる。

\平面ベクトルの分解 {公式}[b]

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ で, \vec{a} と \vec{b} が平行でないとき, 任意の \vec{p} はただ一通りに,

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に表せられる。

\平面ベクトルの成分 {公式A}[i]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると, $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

\平面ベクトルの成分 {公式A}[b]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると, $\vec{a} = \vec{b}$

$$\Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

\平面ベクトルの成分 {公式B}[i]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると, $a_1 = b_1, a_2 = b_2 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$

\平面ベクトルの成分 {公式B}[b]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると, $a_1 = b_1, a_2 = b_2$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

\平面ベクトルの成分 {公式C}[i]

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ とすると, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

\平面ベクトルの成分 {公式C}[b]

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ とすると,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

\平面ベクトルの成分 {公式D}[i]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ また, k, l を実数として, $k\vec{a} + l\vec{b} = k(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) = (ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2)$

\平面ベクトルの成分 {公式D}[b]

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ また, k, l を実数として,

$$k\vec{a} + l\vec{b} = k(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) = (ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2)$$

\ベクトルの成分と大きさ {公式A}[i]

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ とすると, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

\ベクトルの成分と大きさ {公式A}[b]

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ とすると,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

\ベクトルの成分と大きさ {公式B}[i]

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ とすると, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

\ベクトルの成分と大きさ {公式B}[b]

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ とすると,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

\ベクトルの成分と大きさ {証明}

【証明】

三平方の定理より,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

(Q.E.D.)

\平面ベクトルの内積 {公式}[i]

ベクトルの内積は, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) (ただし, θ は \vec{a} と \vec{b} のなす角)

\平面ベクトルの内積 {公式}[b]

ベクトルの内積は,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$
 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) (ただし, θ は \vec{a} と \vec{b} のなす角)

\内積の性質 {公式A}[i]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

\内積の性質 {公式A}[b]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

\内積の性質 {公式B}[i]

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

\内積の性質 {公式B}[b]

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

\内積の性質 {公式C}[i]

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

\内積の性質 {公式C}[b]

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

\内積の性質 {公式D}[i]

$$k \text{ が実数のとき, } (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

\内積の性質 {公式D}[b]

k が実数のとき,

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

\内積の性質 {公式E}[i]

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

\内積の性質 {公式E}[b]

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

\内積の性質 {公式F}[i]

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

\内積の性質 {公式F}[b]

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

\平面ベクトルの平行条件 {条件}[i]

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ また, } k \text{ は実数とする,} \\ \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}, \vec{b} = k\vec{a}$$

\平面ベクトルの平行条件 {条件}[b]

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ また, k は実数とする,
 $\vec{a} // \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$$

\平面ベクトルの垂直条件 {条件}[i]

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で, k は実数とすると, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

\平面ベクトルの垂直条件 {条件}[b]

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で, k は実数とすると,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

\位置ベクトル {公式A}[i]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とすると, 線分 AB を $m:n$ に内分する点は, $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

\位置ベクトル {公式A}[b]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とすると, 線分 AB を $m:n$ に内分する点は,

$$\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

\位置ベクトル {公式A}[i]

【証明】

$P(\vec{p})$ が $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を $m:n$ に内分するとき,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} + \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\位置ベクトル {公式B}[i]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とする, 線分 AB を $m:n$ に外分する点は, $\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$

\位置ベクトル {公式B}[b]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とする, 線分 AB を $m:n$ に外分する点は,

$$\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

\位置ベクトル {外分点の位置ベクトルの証明}

【証明】

$m:n$ に外分ということは $m:-n$ に内分ということなので, $\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$

(Q.E.D.)

\位置ベクトル {公式C}[i]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とする, 線分 AB の中点は, $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

\位置ベクトル {公式C}[b]

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とする, 線分 AB の中点は,

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

\位置ベクトル {公式D}[i]

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ とする, $\triangle ABC$ の重心は, $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

\位置ベクトル {公式D}[b]

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ とする, $\triangle ABC$ の重心は,

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

\ベクトル方程式 {公式A}[i]

s, t を実数とする。点 $A(\vec{a})$ をとおり, \vec{d} に平行な直線は, $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$

\ベクトル方程式 {公式A}[b]

s, t を実数とする。点 $A(\vec{a})$ をとおり, \vec{d} に平行な直線は,

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$$

\ベクトル方程式 {公式B}[i]

s, t を実数とする。二点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線は, $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ (ただし, $s+t=1$)

\ベクトル方程式 {公式B}[b]

s, t を実数とする。二点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線は,

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ (ただし, } s+t=1\text{)}$$

\ベクトル方程式 {公式C}[i]

点 $A(\vec{a})$ を通り, \vec{n} に垂直な直線 \vec{p} について, $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

\ベクトル方程式 {公式C}[b]

点 $A(\vec{a})$ を通り, \vec{n} に垂直な直線 \vec{p} について,

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

\ベクトル方程式 {公式D}[i]

中心 $C(\vec{c})$, 半径 r の円は, $|\vec{p} - \vec{c}| = r, (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$

\ベクトル方程式 {公式D}[b]

中心 $C(\vec{c})$, 半径 r の円は,

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$$

\等差数列 {一般項}[i]

初項 a_1 , 公差 d のとき, $a_n = a_1 + (n-1)d$

\等差数列 {一般項}[b]

初項 a_1 , 公差 d のとき,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

\等差数列 {総和}[i]

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

\等差数列 {総和}[b]

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

\等差数列 {証明}

【証明】

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \cdots + a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d)$$

連立して, $2S = (a_1 + a_n)n$ より,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

(Q.E.D.)

\等比数列 {一般項}[i]

$$a_n = ar^{n-1}$$

\等比数列 {一般項}[b]

$$a_n = ar^{n-1}$$

\等比数列 {総和}[i]

$$r \neq 1 \text{ のとき, } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ もしくは, } \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ のとき, } S_n = na_1$$

\等比数列 {総和}[b]

$r \neq 1$ のとき,

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

もしくは,

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$r = 1$ のとき,

$$S_n = na_1$$

\等比数列 {証明}

【証明】

$$S_n = a_1 + ra_1 + r^2a_1 + \cdots + r^{n-1}a_1$$

$$S_nr = ra_1 + r^2a_2 + r^3a_1 + \cdots + r^n$$

連立することで, $S(1-r) = a_1 - r^na_1$ となる。

よって,

$$S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

また, $\frac{-1}{-1}$ をかけることで,

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

以上より,

$$S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

(Q.E.D.)

\シグマの公式 {公式A}[i]

c は k に無関係なとき, $\sum_{k=1}^n c = nc$

\シグマの公式 {公式A}[b]

c は k に無関係なとき,

$$\sum_{k=1}^n c = nc$$

\シグマの公式 {公式B}[i]

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

\シグマの公式 {公式B}[b]

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

\シグマの公式 {公式C}[i]

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

\シグマの公式 {公式C}[b]

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

\シグマの公式 {公式D}[i]

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

\シグマの公式 {公式D}[b]

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

\シグマの公式 {公式E}[i]

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

\シグマの公式 {公式E}[b]

$$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

\シグマの公式 {証明}

【証明】

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ を用いる。

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ の k に 1 から n までの自然数を代入したものを足したものは,

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となる。

(Q.E.D.)

\シグマの性質 {性質}[i]

p, q が k に無関係な定数のとき, $\sum_{k=1}^n (pa_k + qb_k) = p \sum_{k=1}^n a_k + q \sum_{k=1}^n a_k$

\シグマの性質 {性質}[b]

p, q が k に無関係な定数のとき,

$$\sum_{k=1}^n (pa_k + qb_k) = p \sum_{k=1}^n a_k + q \sum_{k=1}^n a_k$$

\階差数列 {一般項}[i]

数列 a_n の階差数列を b_n とすると, $2 \leq n$ のとき, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

\階差数列 {一般項}[b]

数列 a_n の階差数列を b_n とすると, $2 \leq n$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

\漸化式 {等差型}[i]

$a_{n+1} = a_n + d$ のとき, $a_n = a_1 + (n-1)d$

\漸化式 {等差型}[b]

$a_{n+1} = a_n + d$ のとき,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

\漸化式 {等比型}[i]

$a_{n+1} = ra_n$ のとき, $a_n = a_1 r^{n-1}$

\漸化式 {等比型}[b]

$a_{n+1} = ra_n$ のとき,

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

\漸化式 {階差型}[i]

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ のとき, $a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ ただし, $2 \leq n$

\漸化式 {階差型}[b]

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ のとき,

$$a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (\text{ただし, } 2 \leq n)$$

\漸化式 {特性方程式}[i]

$a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, q \neq 0$) のとき, $a_{n+1} - c = p(a_n - c)$ と変形して等差型に (ただし, $c = pc + q$ を満たす)。

\漸化式 {特性方程式}[b]

$a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, q \neq 0$) のとき,

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

と変形して等差型に (ただし, $c = pc + q$ を満たす)。

\数学的帰納法

自然数 n に関する命題 P が全ての自然数 n について成立することを証明するには, $n = 1$ のときに P が成立することと, $n = k$ のときに P が成立するという仮定のもと, $n = k + 1$ が成立することを証明する。

\共役複素数 {定義}[i]

$\alpha = a + bi$ のとき, 共役な複素数 $\bar{\alpha}$ は $a - bi$

\共役複素数 {定義}[b]

$\alpha = a + bi$ のとき, 共役な複素数 $\bar{\alpha}$ は

$$a - bi$$

\共役複素数 {性質A}[i]

z が実数かつ, $\bar{z} = z$ ならば, z が実数。

\共役複素数 {性質A}[b]

z が実数かつ, $\bar{z} = z$ ならば, z が実数。

\共役複素数 {性質B}[i]

z が純虚数ならば, $\bar{z} = -z, z \neq 0$

\共役複素数 {性質B}[b]

z が純虚数ならば,

$$\bar{z} = -z, z \neq 0$$

\共役複素数 {性質C}[i]

$\bar{z} = -z, z \neq 0$ ならば, z が純虚数。

\共役複素数 {性質C}[b]

$$\bar{z} = -z, z \neq 0$$

ならば, z が純虚数。

\共役複素数 {性質D}[i]

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

\共役複素数 {性質D}[b]

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

\共役複素数 {性質E}[i]

$$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質E}[b]

$$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質F}[i]

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質F}[b]

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質G}[i]

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

\共役複素数 {性質G}[b]

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

\共役複素数 {証明}

【証明】

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, bc, d は実数かつ $a \neq 0, c \neq 0$) として,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - ci) + (b - di) \\ &= \overline{\alpha} + \overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(a + bi)(c + di)} \\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{\alpha}\overline{\beta}\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\複素数の絶対値 {定義}[i]

複素数 $z = a + bi$ に対して, $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

\複素数の絶対値 {定義}[b]

複素数 $z = a + bi$ に対して,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

\複素数の絶対値 {性質A}[i]

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

\複素数の絶対値 {性質A}[b]

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

\複素数の絶対値 {性質B}[i]

$$z\bar{z} = |z|^2$$

\複素数の絶対値 {性質B}[b]

$$z\bar{z} = |z|^2$$

\極形式 {定義}[i]

複素数 $\alpha = a + bi$ について, $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (ただし $r > 0$) また, $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$ を極形式という。

\極形式 {定義}[b]

複素数 $\alpha = a + bi$ について,

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{ただし } r > 0)$$

また, $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$ を極形式という。

\極形式 {性質A}[i]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,
 $\alpha\beta = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

\極形式 {性質A}[b]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,

$$\alpha\beta = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

\極形式 {性質B}[i]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,
 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

\極形式 {性質B}[b]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

\偏角 {定義}[i]

複素数 $\alpha = a + bi$ について, $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

ただし $z > 0$ のとき θ を偏角といい, $\arg \alpha$ で表す。

\偏角 {定義}[b]

複素数 $\alpha = a + bi$ について,

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ただし $z > 0$ のとき θ を偏角といい,

$$\arg \alpha$$

で表す。

\偏角 {性質A}[i]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき, $\theta_1 = \arg \alpha$ また, $\arg \alpha = \theta_1 + 2n\pi$ (n は整数)

\偏角 {性質A}[b]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,

$$\theta_1 = \theta_1 + 2n\pi = \arg \alpha$$

(n は整数)

\偏角 {性質B}[i]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

\偏角 {性質B}[b]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

\偏角 {性質C}[i]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき, $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

\偏角 {性質C}[b]

α, β, γ を複素数とする。 $\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき,

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

\ドモアブルの定理 {公式}[i]

n が整数のとき, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

\ドモアブルの定理 {公式}[b]

n が整数のとき,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

\ドモアブルの定理 {証明}

【証明】

複素数

$$\alpha_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \alpha_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \dots \alpha_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

に対して、 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ を考えると、三角関数の積和の公式から

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = r_1 r_2 \dots r_n \{ \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \}$$

となる。ここで、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ のとき、

$$\alpha^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

を得る。

(Q.E.D.)

\放物線 {定義}[i]

定点 F (焦点) と F を通らない直線 l (準線) があるとき、焦点と準線からの距離の和が一定な点の軌跡。

\放物線 {定義}[b]

定点 F (焦点) と F を通らない直線 l (準線) があるとき、焦点と準線からの距離の和が一定な点の軌跡。

\放物線 {性質A}[i]

放物線は $y^2 = 4px$ と表せられる。

\放物線 {性質A}[b]

放物線は

$$y^2 = 4px$$

と表せられる。

\放物線 {性質B}[i]

放物線の焦点は $F(p, 0)$

\放物線 {性質B}[b]

放物線の焦点は

$$F(p, 0)$$

\放物線 {性質C}[i]

放物線の準線は $x = -p$

\放物線 {性質C}[b]

放物線の準線は

$$x = -p$$

\楕円 {定義}[i]

二つの焦点 F と F' からの距離の和が一定な点の軌跡。

\楕円 {定義}[b]

二つの焦点 F と F' からの距離の和が一定な点の軌跡。

\楕円 {性質A}[i]

楕円は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表せられる。

\楕円 {性質A}[b]

楕円は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と表せられる。

\楕円 {性質B}[i]

楕円の焦点は $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と, $F'(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

\楕円 {性質B}[b]

楕円の焦点は

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0) F'(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

\楕円 {性質C}[i]

楕円の二つの焦点からの距離の和は $2a$ である。

\楕円 {性質C}[b]

楕円の二つの焦点からの距離の和は

$$2a$$

\双曲線 {定義}[i]

二つの焦点 F と F' からの距離の差が 0 でなく一定な点の軌跡。

\双曲線 {定義}[b]

二つの焦点 F と F' からの距離の差が 0 でなく一定な点の軌跡。

\双曲線 {性質A}[i]

双曲線は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表せられる。

\双曲線 {性質A}[b]

双曲線は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と表せられる。

\双曲線 {性質B}[i]

双曲線の焦点は $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ と, $F'(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$

\双曲線 {性質B}[b]

双曲線の焦点は

$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0) F'(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

\双曲線 {性質C}[i]

双曲線の二つの焦点からの距離の差は $2a$

\双曲線 {性質C}[b]

双曲線の二つの焦点からの距離の差は

$$2a$$

\双曲線 {性質D}[i]

双曲線の漸近線は $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

\双曲線 {性質D}[b]

双曲線の漸近線は

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

\連続な関数 {公式}[i]

定義域の x の値 a に関して, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ のとき, $f(x)$ は $x = a$ で連続。

\連続な関数 {公式}[b]

定義域の x の値 a に関して,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

のとき, $f(x)$ は $x = a$ で連続。

\中間値の定理 {公式}[i]

閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ について, $f(a) \neq f(b)$ のとき, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 k について, $f(c) = k$ となる c が少なくとも一つ存在する。

\中間値の定理 {公式}[b]

閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ について, $f(a) \neq f(b)$ のとき, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 k について,

$$f(c) = k$$

となる c が少なくとも一つ存在する。

\平均値の定理 {公式}[i]

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能ならば, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) (a < c < b)$ を満たす c が存在する。

\平均値の定理 {公式}[b]

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能ならば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) (a < c < b)$$

を満たす c が存在する。

\微分 {定義}[i]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

\微分 {定義}[b]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

\微分 {積の微分公式}[i]

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

\微分 {積の微分公式}[b]

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

\微分 {商の微分公式}[i]

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

\微分 {商の微分公式}[b]

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

\微分 {合成関数の微分}[i]

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

\微分 {合成関数の微分}[b]

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

\微分 {初等関数の微分公式A}[i]

$$(c)' = 0$$

\微分 {初等関数の微分公式A}[b]

$$(c)' = 0$$

\微分 {初等関数の微分公式B}[i]

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ は実数})$$

\微分 {初等関数の微分公式B}[b]

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

α は実数

\微分 {初等関数の微分公式C}[i]

$$(\sin x)' = \cos x$$

\微分 {初等関数の微分公式C}[b]

$$(\sin x)' = \cos x$$

\微分 {初等関数の微分公式D}[i]

$$(\cos x)' = -\sin x$$

\微分 {初等関数の微分公式D}[b]

$$(\cos x)' = -\sin x$$

\微分 {初等関数の微分公式E}[i]

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

\微分 {初等関数の微分公式E}[b]

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

\微分 {初等関数の微分公式F}[i]

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

\微分 {初等関数の微分公式F}[b]

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

\微分 {初等関数の微分公式G}[i]

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

\微分 {初等関数の微分公式G}[b]

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

\微分 {初等関数の微分公式H}[i]

$$(e^x)' = e^x$$

\微分 {初等関数の微分公式H}[b]

$$(e^x)' = e^x$$

\微分 {初等関数の微分公式I}[i]

$$(a^x)' = a^x \log a$$

\微分 {初等関数の微分公式I}[b]

$$(a^x)' = a^x \log a$$

\微分 {三角関数の微分公式の証明}

【証明】

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1 - \cos x}{h} \frac{1 + \cos h}{1 + \cos h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1}{1 + \cos h} \frac{\sin^2 h}{h^2} h \right) \\ &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot \frac{1}{2} 1^2 \cdot 0 \\ &= \cos x \\ (\cos x)' &= \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right\}' \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\微分 {対数関数の微分公式の証明}

【証明】

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{x}{h} \right)}{h} \end{aligned}$$

ここで $\frac{h}{x} = t$ とおくと, $h = tx$ となり $\lim_{h \rightarrow 0} t = 0$ なので,

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{xt} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{x} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log e \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$f(x) = e^x$ とおく。

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \end{aligned}$$

ここで $(\log x)' = \frac{1}{x}$ より, $y = \log x$ の $x = 1$ における接線の傾きは 1 であり, $y = \log x$ と $y = e^x$ は $y = x$ において対称であるので $y = e^x$ の $x = 0$ における接線の傾きも 1 なので,

$$f'(0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\接線の方程式 {公式}[i]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における曲線の接線の方程式は, $y - f(a) = f'(x)(x - a)$

\接線の方程式 {公式}[b]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における曲線の接線の方程式は,

$$y - f(a) = f'(x)(x - a)$$

\法線の方程式 {公式}[i]

曲線 $f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における法線の方程式は, $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

\法線の方程式 {公式}[b]

曲線 $f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における法線の方程式は,

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

\不定積分 {定義}[i]

$F'(x) = f(x)$ とすると, $\int f(x) dx = F(x) + C$ (C は積分定数)
 \不定積分 {定義}[b]

$F'(x) = f(x)$ とすると,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

\不定積分 {置換積分}[i]

$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$ ($x = g(t)$ に置換)
 \不定積分 {置換積分}[b]

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

($x = g(t)$ に置換)

\不定積分 {部分積分}[i]

$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$
 \不定積分 {部分積分}[b]

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

\不定積分 {初等関数の積分公式A}[i]

C は積分定数とする。 $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
 \不定積分 {初等関数の積分公式A}[b]

C は積分定数とする。

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式B}[i]

C は積分定数とする。 $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$
 \不定積分 {初等関数の積分公式B}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式C}[i]

C は積分定数とする。 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
 \不定積分 {初等関数の積分公式C}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式D}[i]

C は積分定数とする。 $\int \cos x dx = \sin x + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式D}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式E}[i]

C は積分定数とする。 $\int e^x dx = e^x + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式E}[b]

C は積分定数とする。

$$\int e^x dx = e^x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式F}[i]

C は積分定数とする。 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式F}[b]

C は積分定数とする。

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

\定積分 {定義}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について, $F'(x) = f(x)$ のとき,
 $S = \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

\定積分 {定義}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について, $F'(x) = f(x)$ のとき,

$$S = \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

\区分求積法 {公式}[i]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) x$ ここで, $x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kx$

\区分求積法 {公式}[b]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) x$$

ここで,

$$x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kx$$

\体積の積分 {公式}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の部分 ($a \leq x \leq b$) を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積は,

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

\体積の積分 {公式}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の部分 ($a \leq x \leq b$) を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積は,

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$